제 4회 한국 수학 올림피아드

Korean Mathematical Olympiad

1990

오전문제

1. $\prod_{k=1}^{n} k$가 $\sum_{k=1}^{n} k$로 나누어지는 n을 구하여라.

2. n개의 집합 $A_1, A_2, \cdots, A_n$은 각각 30개의 원소를 가지고 있으며, 이들 중 임의의 서로 다른 두 집합 A_i, A_j는 단 한개의 공통원소를 갖고, $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \phi$(공집합)이라 한다. 이 때 $n < 872$임을 밝혀라.

   착안점 $n \geqq 872$이면 어떤 원소 $a \in A_1$은 31개 이상의 집합에 속함을 보이자.

3. 여러가지 크기의 정사각형 모양의 카드들을 바닥에 늘어 놓았다. 이 카드들로 덮인 부분의 전체 면적을 S라 하자. 이들 카드 중에서 제일 큰 카드 A_1을 고르고 A_1과 서로 겹쳐 있지 않는 카드 중에서 가장 큰 카드 A_2를 고른다. 다음에 A_1, A_2와 겹쳐있지 않는 카드 중에서 제일 큰 카드 A_3를 고른다. 이와같은 방법으로 끝까지 계속하여 n개의 카드 $A_1, A_2, \cdots, A_n$을 골랐다면 이들 카드들의 면적의 합은 $\frac{1}{13}S$보다 큼을 밝혀라.

   착안점 카드 한장에 겹쳐 있을 수 있는 면적을 계산해 보고 전체면적을 구해보자.

4. $1 \leqq k \leqq 90$인 자연수 k에 대하여

$$f(k) = \begin{cases} 2k & (1 \leqq k \leqq 45 \text{ 일때}) \\ 2k - 91 & (46 \leqq k \leqq 90 \text{ 일때}) \end{cases}$$

   으로 정의하면 $f : \{1, 2, \cdots, 90\} \to \{1, 2, \cdots, 90\}$은 전단사함수가 된다. 이때 f를 n번 합성한 함수 f^n이 항등함수가 되는 최소의 양의 정수 n을 구하여라.

   착안점 $\{1, 2, \cdots, 90\}$을 91등분한 단위원주 위의 점이라 생각해 보자.

5. 각 변의 길이가 자연수이고 내접원의 반지름의 길이가 1인 삼각형의 각 변의 길이를 구하여라.

$\boxed{\text{착안점}}$ 등식을 유도한 후 각 변의 길이가 자연수라는 점을 이용해 보자.

오후문제

1. 각 자리수에 9를 포함하지 않는 모든 자연수의 역수의 합은 28보다 작음을 밝혀라.

2. 집합 $X = \{1990, 1990+1, 1990+2, \cdots, 1990+n\}$를 두 개의 부분집합 A, B로 나누어 $A \cap B = \phi$, $A \cup B = X$되게 한다. 이 때 A, B에 속하는 원소들의 합을 같게 할 수 있는 양의 정수 n의 값을 정하여라.

   $\boxed{\text{착안점}}$ X를 같은 갯수의 두집합으로 나누도록 해본다. 만일 $n = 2k+1$이면 $k, k+1$개로 나누고 합이 같아지도록 해본다.

3. 좌표평면의 원점을 출발한 점이 이 평면위에서 운동을 한다. x축을 따라서 움직일 때는 운동방향으로 $2m/sec$의 속력으로 움직이고 x축과 다른 방향으로 움직일 때는 $1m/sec$의 속력으로 움직인다. 이 점이 원점을 출발하여 1초 동안에 도달할 수 있는 최대의 영역을 좌표평면위에 도시하고 이 영역의 넓이를 구하여라.

   $\boxed{\text{착안점}}$ 점이 x축을 운동한 시간을 기준으로 식을 만들어 보자.

4. 세 변의 길이가 서로 다른 삼각형 ABC에서 무게중심, 내심 및 수심을 각각 G, K, H라 한다. $\angle GKH > 90°$임을 증명하여라.

5. $a_i > 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$ 일때

$$\frac{a_1}{a_2 + a_3 + \cdots + a_n} + \frac{a_2}{a_1 + a_3 + \cdots + a_n} +$$
$$\cdots + \frac{a_i}{a_1 + a_2 + \cdots + a_{i-1} + a_{i+1} + \cdots + a_n} +$$
$$\cdots + \frac{a_n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}} \geqq \frac{n}{n-1}$$

   임을 증명하여라.