제 5회 한국 수학 올림피아드

Korean Mathematical Olympiad

1991

오전문제

1. 정수계수의 1990차 다항식 $f(x)$에 대하여 방정식 $\{f(x)\}^2 = 1$ 의 서로 다른 정수해의 개수는 1992개 이하임을 보여라.

   $\boxed{\text{착안점}}$ $f(x) - 1 = 0,\ f(x) + 1 = 0$ 각각의 근을 $x_1, \cdots, x_m,\ y_1 \cdots, y_n$라 하고 $m + n \leqq 1992$임을 보인다.

2. 유리수 전체의 집합 Q의 공집합이 아닌 부분집합 S가 다음 조건을 만족시키고 있다.

   (i) $0 \notin S$

   (ii) $s_1, s_2 \in S$ 이면 $\dfrac{s_1}{s_2} \in S$이다.

   (iii) $0 \neq q \notin S$인 유리수 q가 존재하여 $Q - S = \{qs \mid s \in S\}$이 성립한다.

   이 때 $x \in S$이면 $x = y + z$인 y, z가 S에 존재함을 보여라.

   $\boxed{\text{착안점}}$ 임의의 유리수의 제곱이 S에 속하게 됨을 보이면 된다.

3. $AB = AC$인 이등변 삼각형 ABC에서 변 BC의 중점을 D라 한다. $\angle ABC$의 삼등분선이 AD와 만나는 점을 A로부터 차례대로 M, N 이라하고, CN의 연장과 AB의 교점을 E라 하면 $EM//BN$임을 증명하여라.

   $\boxed{\text{착안점}}$ $\square EBCM$은 동일 원주위에 있다.

4. 임의로 주어진 자연수 k에 대하여 집합

$$\mathbb{N}^k = \{(x_1, x_2, \cdots, x_k) \mid x_1, x_2, \cdots, x_k \in \mathbb{N}\}$$

   을 생각하자.

   (단, 여기서 $\mathbb{N}$은 자연수 전체의 집합이다.) $\mathbb{N}^k$의 원소 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_k)$, $\quad y = (y_1, y_2, \cdots, y_k)$에 대하여 $x_i \leqq y_i$, $\quad (i = 1, 2, \cdots, k)$일 때 $x \leqq y$라고 정의한다. X를 $\mathbb{N}^k$의 임의의 부분집합이라고 하고, $x \in X$에 대하여 $m(x)$를 X의

원소로서 x보다 작거나 같은 원소의 개수라고 할 때 집합 $M(X) = \{x \in X \mid m(x) = 1\}$이 유한집합임을 보여라.

$\boxed{\text{착안점}}$ 수학적 귀납법 사용

5. (1) $\sum_{m=k}^{n} \binom{m}{k} = \binom{n+1}{k+1}$임을 증명하여라.

$\boxed{\text{착안점}}$ $\frac{m!}{(m-k)!} = \frac{1}{k+1}\left\{(m-k+1)\cdots(m+1) - (m-k)\cdots m\right\}$

(2) $\frac{1}{1991}\binom{1991}{0} - \frac{1}{1990}\binom{1990}{1} + \frac{1}{1989}\binom{1989}{2} - \cdots \cdots + \frac{(-1)^m}{1991-m}\binom{1991-m}{m} + \cdots - \frac{1}{996}\binom{996}{995} = \frac{1}{1991}$ 임을 증명하여라

$\boxed{\text{착안점}}$ $\begin{cases} S(n) = \sum_{m=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^m \binom{n-m}{m} \\ S(n+1) = S(n) - S(n-1) \\ \frac{n}{n-m}\binom{n-m}{m} = \binom{n-m}{m} + \binom{n-m-1}{m-1} \end{cases}$