제 6회 한국 수학 올림피아드

Korean Mathematical Olympiad

1992

오전문제

1. $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{1}{k+1}$ 의 값을 구하여라.

   $\boxed{\text{착안점}}$ $(x-1)^n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}x^{n-k}$

2. $2^{1992}-1$은 2^{248} 보다 큰 여섯개의 정수의 곱으로 나타낼 수 있음을 보여라.

   $\boxed{\text{착안점}}$ 인수분해를 반복한다.

3. 정수 수열 $\{u_n\}$이 다음의 조건을 만족시킨다.

   $$u_1 = 1,\ u_{3n-1} = 0\ (n \geqq 1),\ u_{3n} = u_n\ (n \geqq 1),\ u_{3n+1} = u_n + 1\ (n \geqq 1)$$

   (1) u_{1992}를 구하여라.

   (2) n이 자연수이고 $m = (3^n+1)^3$ 일 때, u_m을 구하여라.

   (3) $1 \leqq n \leqq 3^M$(M은 자연수)인 n에 대하여, $u_n = 0$인 n의 개수를 구하여라.

   $\boxed{\text{착안점}}$ $n = 3^k(3n-1)\ (k \geqq 0,\ \ n \geqq 1)$

4. 공간에 있는 n개의 점을 모두 빨간색 혹은 파란색 선분으로 연결하였다고 할 때, 자신으로부터 그어져 나간 빨간색 선분의 갯수가 같은 두 점이 존재함을 보여라. 단, $n \geqq 2$이고 어떤 세 점도 같은 직선 위에 있지 않다고 한다.

   $\boxed{\text{착안점}}$ 비둘기집의 원리

5. $\angle C = 90°$인 직각삼각형 ABC에 대하여 반직선 $\overrightarrow{CA}$ 상에 $\angle CPB = \angle CBA$ 되도록 점 P를 잡고, 반직선 $\overrightarrow{CB}$상에 $\angle CQA = \angle CAB$ 되도록 점 Q를 잡는다. 또한, 반직선 $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}$상에 각각 점 R, S를 $\angle ABR = \angle BAS = 90°$ 되도록 잡는다. 이 때 $\frac{\overline{CP}\cdot\overline{CQ}}{\overline{AR}\cdot\overline{BS}}$ 가 최대가 되는 직각삼각형 ABC의 모양을 결정하고 그 값을 구하여라.

   $\boxed{\text{착안점}}$ $\frac{\overline{CP}}{\overline{AR}} + \frac{\overline{CQ}}{\overline{BS}} = 1$

오후문제

1. $a_0 = 2,\ b_0 = 3^{a_0},\ a_1 = 2^{b_0}, b_1 = 3^{a_1}, \cdots, a_n = 2^{b_{n-1}}, b_n = 3^{a_n}, \cdots$으로 정의된 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$에 대하여 $13^{a_n} + 23^{b_n}$은 항상 24의 배수임을 보여라.

   $\boxed{\text{착안점}}$ $a_n = 8k,\ b_n = 2m+1,\ k, m \in \mathbb{N},\ n \geqq 1$

2. 양수 a_0, b_0, c_0에 대하여 $a_n, b_n, c_n (n = 0, 1, 2, \cdots)$를 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{a_n + b_n + c_n}{3}, \qquad b_{n+1} = \frac{a_n b_n + b_n c_n + c_n a_n}{a_n + b_n + c_n}, \\ c_{n+1} &= \frac{3a_n b_n c_n}{a_n b_n + b_n c_n + c_n a_n} \end{aligned}$$

   (1) 각각의 $n \geqq 1$에 대하여 a_n, b_n, c_n의 대소관계를 밝혀라.

   (2) 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$은 같은 극한값으로 수렴함을 보이고 그 값을 구하여라.

   $\boxed{\text{착안점}}$ 일단 각각이 수렴함을 보인다.

3. $(2+\sqrt{3})^5$를 넘지 않는 최대의 정수를 구하여라.

   $\boxed{\text{착안점}}$ $[(2+\sqrt{3})^5 + (2-\sqrt{3})^5]$은 정수

4. $(n^7 - 7)$가 19의 배수가 되도록 하는 자연수 n의 최소값을 구하여라.

   $\boxed{\text{착안점}}$ $n^7 \equiv 7(\mathrm{mod} 19), \quad n^{21} \equiv n^{18} \equiv 1(\mathrm{mod} 19)$

5. 삼각형 ABC의 각 B 안의 방점원을 O, 원 O와 변 BA의 연장선과의 접점을 P, 점 P를 지나는 원 O의 지름의 다른 끝점을 Q라고 한다. 변 AB의 중점을 M, 점 M에 관한 점 P의 대칭점을 R(즉, $\overline{PM} = \overline{MR}$)이라 할 때, 세 점 Q, C, R은 같은 직선 위에 있음을 보여라.

   $\boxed{\text{착안점}}$ H가 C에서 AB에 내린 수선의 발일때 $\frac{CH}{RH} = \frac{PQ}{PR}$가 된다.