

제 7회 한국 수학 올림피아드
 Korean Mathematical Olympiad
 1993

오전문제

1. 길이가 1인 막대를 이어서 만든 정육면체들을 붙여서 가로, 세로, 높이가 각각 l, m, n 인 직육면체를 만들었다. 다음 물음에 답하여라.

(1) 이들 구조물 속에 직육면체는 몇 개 있는가? (정육면체 포함)

착안점 직육면체를 쉽게 만드는 방법을 생각

(2) 위 그림의 꼭지점 A 에서 B 까지 막대를 따라서 최단 거리로 갈 수 있는 방법의 수 S 를 구하여라. (내부도 통과)

(3) $l = m = n$ 일 때 (2)에서 구한 S 는 3의 배수임을 보여라.

2. a, b, c, d 는 자연수이고 $r = 1 - \frac{a}{b} - \frac{c}{d}$ 이라 할 때, $a + c \leq 1993$ 이고 $r > 0$ 이면 $r > \frac{1}{1993^3}$ 임을 보여라.

착안점 b, d 의 범위를 여러 경우로 나누어 생각

3. $2^{2^n} + 5$ 가 소수가 될 모든 음이 아닌 정수 n 을 구하여라.

착안점 n 이 짝수일 경우, 홀수일 경우로 나누어 조사해 본다.

4. 음이 아닌 임의의 정수 m, n 에 대하여, 다음 두 조건을 만족시키는 함수 $f(m, n)$ 을 구하여라.

(i) $2f(m, n) = 2 + f(m + 1, n - 1) + f(m - 1, n + 1)$ ($m \geq 1, n \geq 1$)

(ii) $f(m, 0) = f(0, n) = 0$ ($m \geq 0, n \geq 0$)

착안점 점화식으로 주어진 수열의 합을 구하는 경우와 비슷하게 생각해 본다.

5. 정사각형 $ABCD$ 안에 임의의 한 점 P 를 잡고, 네 점 A, B, C, D 에서 직선 BP, CP, DP, AP 에 그은 수선을 각각 l_1, l_2, l_3, l_4 라 한다. 네 직선 l_1, l_2, l_3, l_4 는 한점에서 만남을 증명하여라.

착안점 회전변환을 생각해 본다.

오후문제

1. 가로, 세로의 길이가 m, n (m, n 은 양의 정수)인 직사각형 $ABCD$ 가 있다. 꼭지점 A 에서 두 변에 대하여 45° 인 방향으로 발사된 빛이 변에서 정반사하여 진행하다가 꼭지점에 도달하면 멈춘다고 한다. 변에서 반사하는 횟수를 $f(m, n)$ 이라 할 때 다음 물음에 답하여라.

(1) m, n 이 서로 소일 때 $f(m, n)$ 을 구하여라.

착안점 직사각형 $ABCD$ 로 큰 정사각형을 만든다.

(2) $\frac{m'}{m} = \frac{n'}{n}$ 이면 $f(m', n') = f(m, n)$ 임을 밝혀라.

착안점 닮음을 이용한다.

2. 양의 정수 x, y, z 에 대하여 $f(x, y, z) = 1 + 2 + 3 + \dots + (x + y - 2) - z$ 라 한다.

$$f(a, b, c) = f(c, d, a) = 1993$$

을 만족시키는 양의 정수 a, b, c, d 의 모든 짝을 구하여라.

착안점 $a = c, b = d$ 임을 보인다.

3. $0 \leq x \leq 1$ 인 실수 x 중에서, 3진법의 소수로 나타내었을 때, 각 자리의 수 0 또는 2만으로 된 전체의 집합을 K 라 하자.

$$S = \{x + y \mid x, y \in K\} \text{ 라 하면 } S = \{z \mid 0 \leq z \leq 2\} \text{ 임을 보여라.}$$

착안점 $\frac{x}{2}, \frac{y}{2}$ 를 생각한다.

4. 임의의 삼각형에서 둘레의 길이를 L , 세 중선의 길이의 합을 M 이라 할 때 $\frac{M}{L} > \frac{3}{4}$ 임을 증명하여라.

착안점 벡터로 생각해 보자.

5. C_0, C_1, C_2, \dots 들을 다음과 같이 정의된 평면상의 원들의 수열이라 하자.

(i) C_0 은 원 $x^2 + y^2 = 1$ 이다.

(ii) $n = 0, 1, 2, \dots$ 에 대하여 원 C_{n+1} 은 $y \geq 0$ 인 평면위에 있고, 원 C_n 과 외접하고 쌍곡선 $x^2 - y^2 = 1$ 과 두 점에서 접한다. r_n 을 원 C_n 의 반지름이라 할 때, r_n 은 정수임을 보이고, r_n 을 구하여라.

착안점 원 C_n 의 방정식 : $x^2 + (y - a_n)^2 = r_n^2$