제 8회 한국 수학 올림피아드

Korean Mathematical Olympiad

1994. 11. 13.

오전문제

1. 평면 위의 유한개의 점 중 임의의 세 점을 택하여 이들을 꼭지점으로 하는 삼각형을 만들면 그 넓이는 항상 1 이하이다. 이 때, 이 유한개의 점은 모두 넓이가 4 보다 크지 않는 삼각형의 내부 또는 경계에 놓여 있음을 보여라.

2. 주어진 양의 정수 m에 대하여 m, n이 서로 소이고

$$(x^2 + y^2)^m = (xy)^n$$

을 만족시키는 자연수들의 쌍 (n, x, y)를 모두 구하여라. (단, n, x, y를 m 의 함수로 나타내어라.)

3. 원에 내접하고 있는 삼각형 ABC가 있다. 호 BC, CA, AB의 중점을 각각 P, Q, R이라 하고 선분 AP, BQ, CR이 변 BC, CA, AB와 만나는 점을 각각 L, M, N이라 하자. 이 때

$$\frac{AL}{PL} + \frac{BM}{QM} + \frac{CN}{RN} \geqq 9$$

임을 보여라. 또 등호가 성립하는 것은 어떤 경우인가 ?

4. 어떤 자연수 n에 대하여 $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k = n$ 이고, $\lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq \cdots \geqq \lambda_k \geqq 1$을 만족시키는 자연수열 $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k)$를 n의 분할이라 하고, 각각의 λ_i를 부분이라고 한다. 예를들면 (4, 3, 1)은 세 부분이 모두 다른 8의 한 분할이다. 자연수 m에 대하여 $n > \frac{1}{2}m(m+1)$일 때, m 부분이 모두 다른 n의 분할의 총수는 m 이하의 부분을 갖는 $n - \frac{1}{2}m(m+1)$의 분할의 총수와 같음을 보여라.

오후문제

5. 주어진 원 둘레 위에 임의로 세 점을 잡았을 때, 이 세 점이 반원주 위에 있을 확률을 구하여라.

6. $n > 1$인 모든 자연수 n은 2 또는 3 이외의 인수를 갖지않고, 어느 두 수도 서로 약수 또는 배수가 아닌 수들의 유한개의 합으로 나타낼 수 있음을 보여라. 즉, $i \neq j$ 일 때 음이 아닌 정수 $\alpha_i, \alpha_j, \beta_i, \beta_j$에 대하여 $(\alpha_i - \alpha_j)(\beta_i - \beta_j) < 0$이고 $n = \sum_{i=1}^{N} 2^{\alpha_i} 3^{\beta_i}$이다.

7. 0을 제외한 모든 실수에서 정의되고, 실수값을 취하는 함수 f가

$$\frac{1}{x} f(-x) + f(\frac{1}{x}) = x, \qquad x \neq 0$$

를 만족시킨다. 이러한 $f(x)$를 모두 구하여라.

8. 반지름의 길이가 각각 $r_1, r_2 (r_1 < r_2)$인 두 원 O_1, O_2가 두 점 A, B에서 서로 만나고 있다. 원 O_1위에 임의의 점 P를 잡고, 직선 PA, PB와 원 O_2와의 교점을 각각 Q, R이라고 할 때 다음 물음에 답하여라. (1) $\overline{QR} = y$, $\angle APB = \theta$라 할 때, y를 r_1, r_2, θ 로 나타내어라. (2) 두 원 O_1, O_2가 직교하기 위한 필요충분조건은 $y = 2r_2$임을 보여라.