제 9회 한국 수학 올림피아드

Korean Mathematical Olympiad

1995. 11. 19.

오전문제

1. 어느 학생이 하루 용돈으로 1,000원 또는 2,000원을 쓰는데 20일 동안 쓴 총 금액이 30,000원을 넘지 않았다. 그렇다면 연속한 며칠동안에 쓴 용돈의 합이 꼭 7,000원이 되는 기간이 적어도 세 번 존재함을 보여라.

2. 방정식 $x^2 - 2y^2 = 1$의 정수해가 무한히 많이 존재함을 보여라.

3. 정삼각형 ABC의 내부의 한 점 P에 대하여 $\overline{AP} = 1,\ \overline{BP} = \sqrt{3},\ \overline{CP} = 2$ 이라고 한다. 이 정삼각형의 한 변의 길이를 구하여라.

4. 자연수 n $(n \geqq 3)$이 주어져 있다. 두 자연수 s, n의 최대공약수를 $\gcd(s, n)$, 세 자연수 s, t, n의 최대공약수를 $\gcd(s, t, n)$이라 할 때, $n = pq$ (단, p, q는 서로 다른 소수)에 대하여 다음 등식을 증명하여라.

$$\sum_{s=1}^{n} \{\gcd(s, n)\}^2 = \sum s = 1^n \sum_{t=1}^{n} \gcd(s, t, n)$$

오후문제

5. n, k를 주어진 자연수라 한다. 집합 $\{1, 2, \cdots, n\}$의 부분집합 $X_1, X_2, \cdots, X_k$ 중에서 $X_1 \cap X_2 \cap X_3 \cap \cdots \cap X_k = \phi$ (공집합)를 만족하는 순서쌍 $(X_1, X_2, \cdots, X_k)$의 개수를 구하여라.

6. 자연수 n에 대하여 $p = 4^n + 1$이라 한다. p가 $3^{2 \cdot 4^{n-1}} + 1$의 약수이면 p는 소수임을 보여라.

7. 한 변의 길이가 2인 정 n각형이 있다. n개의 꼭지점을 반시계 방향으로 $A_1, A_2, \cdots, A_n$이라 하고, 선분 A_iA_{i+1} $(i = 1, 2, \cdots, n)$의 중점을 M_i라 하자. 단, $A_{n-1} = A_1$이다. $M_{n+1} = M_1$ 이라고 할 때, 선분 A_iM_{i+1} $(i = 1, 2, \cdots, n)$들로 둘러싸인 작은 정 n각형과 본래의 정 n각형과 본래의 정 n각형 사이의 넓이를 S_n이라 하면

$$S_n < \frac{16\pi}{9} \qquad (n \geqq 4)$$

임을 증명하여라.

8. 반지름의 길이가 각각 r, R $(r < R)$인 두 개의 구 S_1, S_2가 외접하고, 두 구는 하나의 원뿔에 내접하고 있다. S_1, S_2의 중심을 각각 O_1, O_2라 할 때 다음 물음에 답하여라. (1) 두 구 S_1, S_2에 외접하고 원뿔에 내접하는 구 S의 반지름의 길이 x 와 S의 중심 O에서 직선 O_1O_2에 그은 수선의 길이 y를 r, R의 식으로 나타내어라. (2) (1)에서 구한 S와 같은 구 n개를 이웃끼리 외접하면서 두 구 S_1, S_2 와 원뿔 사이에 꼭 끼워 넣을 수 있는 n의 값을 모두 구하여라.