

1988년 최종대표선발시험
Final Round

제 1 일

1988. 4. 30.

1. $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = a^2b^2c^2$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수해의 짝 (a, b, c, d) 를 모두 구하여라.

2. 모든 실수 x 에 대하여 방정식

$$x^2 f(x) + f(1-x) = 2x - x^4$$

를 만족시키는 실수치 함수 $f(x)$ 를 모두 구하여라.

3. $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$, $\overline{AB} = c$ 인 $\triangle ABC$ 의 내부의 한 점 P 에서 각 변 BC, CA, AB 에 내린 수선의 발을 각각 A', B', C' 이라 하고 $\overline{B'C'} = a'$, $\overline{C'A'} = b'$, $\overline{A'B'} = c'$ 이라 할 때

$$\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} + \frac{c'}{c} < 2$$

이 성립함을 증명하여라.

제 2 일

1988. 5. 1.

4. $a_0 = 0, a_1 = a_2 = 1$ 이고

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, \quad n \geq 1$$

인 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 다음 물음에 답하여라. (1) 임의의 자연수 j, k 에 대하여

$$a_{j+k} = a_j a_{k-1} + a_{j+1} a_k$$

이 성립함을 밝혀라. (2) 임의의 자연수 k, n 에 대하여 a_{kn} 은 a_k 로 나누어 짐을 밝혀라. (3) 서로 이웃하는 두 항 a_n, a_{n+1} 서로 소임을 밝혀라.

5. 반지름의 길이가 R 인 구면 위에 동일 대원 위에 있지 않은 세 점 A, B, C 가 있다. 각 두 점을 지나는 대원의 열호로 이루어진 구면삼각형 ABC 의 각 꼭지각(꼭지점에저의 두 대원의 접선이 이루는 각)을 각각 α, β, γ 라 한다. 구면삼각형 ABC 의 면적 S 를 α, β, γ, R 로 나타내어라. 단, α, β, γ 는 호도법으로 나타낸 각이다.
6. 어떤 도시에 다음 조건을 만족시키는 버스 노선 (두 개 이상)이 있다. (1) 각 노선은 꼭 3개의 정류장이 있다. (2) 어떤 두 노선도 꼭 한 개의 정류장을 공유한다. (3) 주어진 어떤 두 정류장도 이를 연결하는 단 하나의 노선이 있다. 이 시에는 몇 개의 버스 노선이 있는가?