1989년 최종대표선발시험

Final Round

제 1 일

1989. 4. 22.

1. 다음 부등식을 증명하여라.

   (1) $\frac{43}{44} < \frac{1}{\sqrt{2}+2} + \frac{1}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{1988\sqrt{1989}+1989\sqrt{1988}} < \frac{44}{45}$ (2) $\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)} < \frac{1}{\sqrt{2n}} \qquad (n \geq 1)$.

2. $0 < \alpha_i < \frac{\pi}{2}$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 이고, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \alpha$(일정) 이라 할 때 다음 식의 최대값을 구하여라.

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \sin\alpha_i\right)\left(\prod_{i=1}^{n} \sin\alpha_i\right).$$

3. $f(x) = |x^2 - 1|$ (x 는 실수), $f^{(2)}(x) = f \circ f(x) = f\{f(x)\}$, $f^{(n)}(x) = f(f^{(n-1)}(x))$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 이라 한다. (1) 임의의 자연수 n에 대하여 $f^{(n)}(x) = 0$ 의 근과 $f^{(n)}(x) = 1$ 의 근을 크기 순으로 나열하면 두 방정식의 근이 교대로 배열됨을 밝혀라. (2) 모든 자연수 n에 대하여 $f^{(n)}(x) = 0$의 근과 $f^{(n)}(x) = 1$ 의 근을 모두 포함하는 최소의 개구간을 구하여라.

제 2 일

1989. 4. 23.

4. 자연수 n에 대하여 $(45 + \sqrt{1989})^n$의 정수부분은 홀수임을 밝혀라.

5. 원 O에 내접하는 정 $(2n+1)$각형의 꼭지점을 차례로 $A_1, A_2, \cdots, A_{2n+1}$이라 한다. 호 $\frown A_1A_{2n+1}$위의 임의의 점 P에 대하여

$$\sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^k \overline{PA_k} = 0$$

임을 증명하여라.

6. . 세 변의 길이가 각각 a, b, c인 $\triangle ABC$의 중심을 G, 내심을 I, 내접원의 반지름의 길이를 r이라 할 때, 다음 물음에 답하여라. (1) $\overline{GI}^2 = r^2 + f(a, b, c)$ 이라 할 때, a, b, c에 관한 이차식 $f(a, b, c)$를 구하여라. (2) 중심 G가 내접원 위에 있을 때

(i) $a \geq b \geq c$라 하고 $\frac{a}{c}$의 최대값을 구하여라. (ii) 세 변의 길이가 정수인 삼각형의 예를 하나 들어라.