1990년 최종대표선발시험

Final Round

제 1 일

1990. 4. 14.

1. 다음 등식을 증명하여라.

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\binom{n}{k} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} \tag{1}$$

$$\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1} \tag{2}$$

단, $\binom{m}{n} = \frac{m!}{(m-n)!n!}$ 이다.

2. 공간의 n개의 점 $P_i(x_i, y_i, z_i)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$의 중심을

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i,\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i,\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i\right)$$

로 정의한다. 공간에 p $(p > 2)$개의 점 $A_{11}, A_{12}, \cdots, A_{1p}$가 주어져 있다. $i = 1, 2, \cdots, p$에 대해서 점 A_{1i}를 제외한 나머지 $p-1$개의 점의 중심을 A_{2i}라 한다. 일반으로 $n = 1, 2, 3, \cdots$에 대하여 p개의 점 $A_{n1}, A_{n2}, \cdots, A_{np}$에서 점 A_{ni}를 제외한 나머지 $p-1$개의 점의 중심을 각각 $A_{n+1,i}$ $(i = 1, 2, \cdots, p)$ 라 한다. $\lim_{n\to\infty} A_{ni}$를 구하여라.

3. a, b $(b \geq 2)$를 최대 공약수가 d인 양의 정수라 한다.

$$\sum_{n=1}^{b-1} \left[\frac{an}{b}\right] = \frac{(a-1)(b-1)}{2} + \frac{d-1}{2}$$

임을 증명하여라. 단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대의 정수이다.

제 2 일

1990. 4. 15.

4. 삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이를 r, 세 개의 방접원의 반지름의 길이를 각각 r_A, r_B, r_C라 할 때

$$\frac{1}{r_A} + \frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_C} = \frac{1}{r}$$

임을 밝혀라.

5. 1000개의 원소를 가진 집합을 서로 소인 $m+1$개의 부분집합으로 나누었다. 이들 집합 중에서 원소의 개수가 최소인 것은 n개의 원소를 가지고, 원소의 개수가 최대인 것은 $n+m$개의 원소를 가지며 원소의 개수가 같은 부분집합은 없다고 한다. 이렇게 나눌 수 있는 모든 m, n의 값을 구하여라.

6. (1) $i = 1, 2, 3, \cdots$ 에 대하여 $P_i = \{x | \frac{i(i-1)}{2} < x \leq \frac{i(i+1)}{2}, x$는 자연수$\}$ 이라 할 때, $i \neq j$이면 $P_i \cap P_j = \phi$(공집합)임을 밝혀라.

(2) N은 자연수의 집합 $\{1, 2, 3, \cdots\}$ 이라 한다. $N \times N$에서 정의되고 N의 값을 가지는 함수 f가

$$f(m,n) = \frac{1}{2}(m+n-2)(m+n-1) + m$$

로 정의 되어 있다. $f(m,n) = f(p,q)$이면, $m = p, \quad n = q$임을 밝혀라.