1991년 최종대표선발시험

Final Round

제 1 일

1991. 4. 20.

1. 수열 $\{a_n\}$의 각항은 서로 다른 자연수라 한다.

$$S_n = \frac{1}{1+a_1} + \frac{a}{(1+a_1)(1+a_2)} + \cdots + \frac{a_1 a_2 \cdots a_{n-1}}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}$$

이라 할 때

$$\frac{1990}{1991} < S_n < 1$$

을 만족시키는 최소의 n과 이에 대한 수열 $\{a_n\}$을 구하여라.

2. n은 4이상의 자연수이고, 자연수 전체의 집합 N의 부분집합 H 가 다음 조건을 만족시키고 있다. (1) H는 덧셈에 대하여 닫혀 있다. (2) $N - H$는 n개의 원소를 갖고 있다. (3) H의 최소 원소는 3이다. 이 때, 3과 서로 소이면서 n이하인 자연수는 H의 원소가 될 수 없음을 증명하여라.

3. 서로 다른 네 개의 실수 중에는

$$0 < \frac{(a-b)}{1+ab} < \sqrt{3}$$

을 만족시키는 두 개의 실수 a, b가 반드시 존재함을 증명하여라.

제 2 일

1991. 4. 21.

4. x는 실수이고 $f(x) = \max(0, 1-|x|)$에 대하여 $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k f(x-2k)$ 라 한다. $a_n = \max_{-n \le x \le n} g(x)$ 라 할 때

$$\frac{1}{4} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n} a_n}{1+a_n} < \frac{5}{4}$$

임을 증명하여라.

5. 자연수 k에 대하여 $d(k)$를 k의 양의 약수의 개수라고 할 때, 임의의 자연수 n에 대하여

$$d(1) + d(2) + \cdots + d(n) = \left[\frac{n}{1}\right] + \left[\frac{n}{2}\right] + \cdots + \left[\frac{n}{n}\right]$$

임올 증명하여라. 단. $[x]$는 x를 넘지 않은 최대의 정수이다.

6. 삼각형 ABC의 수심을 H, 무게 중심을 G, 외접원의 반지름을 R, 세 변의 길이를 a, b, c라 할 때 다음에 답하여라. (1) $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{CH} = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$임을 증명하여라. (2) $\overline{GH}^2$을 R과 a, b, c로 나타내어라.