1992년 최종대표선발시험
Final Round

제 1 일

1992. 4. 18.

1. x_0 를 홀수인 자연수라고 하고, $x_i = \frac{3x_{i-1}+1}{2} (i = 1, 2, \cdots)$ 라고 정의할 때, x_n 이 짝수가 되는 자연수 n 이 존재함을 보여라.

2. 양의 수열 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 이

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq \frac{a_{n+1}}{2}$$

을 만족시킨다고 한다. 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \cdots + \sqrt{a_n} \leq C\sqrt{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$$

를 만족시키는 최소의 상수 C 의 값을 구하여라.

3. 좌표 평면에서 꼭지점의 좌표가 모두 정수이고 각 변의 길이가 모두 정수인 삼각형들의 집합을 T 라고 한다. T 에 속하는 임의의 이등변 삼각형은 T 에 속하는 두 개의 서로 합동인 직각 삼각형을 붙여 놓은 것임을 보여라.

제 2 일

1992. 4. 19.

4. $f(x) = x + x^2 + x^3 + \cdots$ 에 대하여, 정수 수열 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 가

$$x = a_1 f(x) + a_2 f(x^2) + a_3 f(x^3) + \cdots$$

를 만족시킨다고 할 때, r 과 s 가 서로 소이면 $a_{rs} = a_r a_s$ 임을 보이고, a_{1992} 를 구하라.

5. 자연수 n 에 대하여 $I_n = \{1, 2, \cdots, n\}$ 이라고 하자. 임의의 소수 $p \in I_n$ 에 대하여 원소의 개수가 $n - [n/p] + 1$ 인 임의의 I_n 의 부분집합 S 에는 $a \mid b$ 를 만족시키는 두 원소 a, b 가 존재함을 보여라. 단, $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 최대의 정수이다.

6. 원점 O 를 중심으로 하는 원 w 위에 두 점 A_1, A_2 가 주어져 있고, 선분 OA_1, OA_2 를 지름으로 하는 원을 각각 w_1, w_2 라고 한다. 원 w 와 점 P 에서 외접하고, A_1, A_2 에서 원 w 에 그은 접선에 각각 점 B_1, B_2 에서 접하는 원을 w' 이라고 한다. 선분 OB_1, OB_2이 원 w_1, w_2 와 만나는 점을 각각 Q, R 이라고 할 때, 세 점 P, Q, R 을 지나는 원은 원 w 에 내접하고 원 w_1, w_2에 외접함을 보여라.