1994년 최종대표선발시험
Final Round

제 1 일

1994. 4. 16.

1. 음이 아닌 정수의 집합을 S라 할 때, 다음 두 조건을 만족시키는 함수

$$f : S \to S,\ g : S \to S,\ h : S \to S$$

를 모두 구하여라. (i) 임의의 $m, n \in S$에 대하여

$$f(m+n) = g(m) + h(n) + 2mn$$

(ii) $g(1) = h(1) = 1$.

2. 임의의 삼각형의 세 내각의 크기를 α, β, γ라 할 때

$$csc^2\frac{\alpha}{2} + csc^2\frac{\beta}{2} + csc^2\frac{\gamma}{2} \geq 12$$

임을 증명하고, 등호가 성립하는 경우를 찾아라.

3. 삼각형 ABC의 내심을 I, 외심을 O, 외접원의 반지름을 R 라 하고, 세 개의 방심을 A', B', C'이라 한다. 삼각형 $A'B'C'$의 외심을 O', 외접원의 반지름을 R'이라 할 때 다음을 증명하여라.

(i) $R' = 2R$ (ii) $\overline{IO'} = 2\overline{IO}$

제 2 일

1994. 4. 17.

4. 어떤 정수 k에 대해서도 방정식 $y^2 - k = x^3$은 다음 5개의 정수해

$$(x_1, y_1),\ (x_2, y_1 - 1), (x_3, y_1 - 2), (x_4, y_1 - 3), (x_5, y_1 - 4)$$

를 가질 수 없음을 보이고, 만일 4개의 정수해

$$(x_1, y_1),\ (x_2, y_1 - 1),\ (x_3, y_1 - 2),\ (x_4, y_1 - 3)$$

를 가지면 $k \equiv 17 \pmod{63}$ 임을 밝혀라.

5. $\mathbb{N}$을 자연수의 집합이라고 하자. $S \subset \mathbb{N}$인 집합 S와 $n \in \mathbb{N}$에 대하여 집합 $S \oplus \{n\}$을 $S \oplus \{n\} = \{s + n | s \in S\}$로 정의한다. 집합 S_k를

$$\begin{aligned} S_1 &= \{1\} \\ S_k &= (S_{k-1} \oplus \{k\}) \cup \{2k - 1\} \quad (k = 2, 3, 4 \cdots) \end{aligned}$$

라 할 때, (i) $\mathbb{N} - \cup_{k=1}^{\infty} S_k$를 구하여라.

(ii) $1994 \in S_n$ 인 n을 모두 구하여라.

6. 삼각형 ABC에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(i) $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A \cos B \cos C$임을 증명하여라.

(ii) $\cos A : \cos B : \cos C = 39 : 33 : 25$ 일 때 $\sin A : \sin B : \sin C$ 를 구하여라.