1995년 최종대표선발시험
Final Round

제 1 일

1995. 4. 15.

1. 임의의 자연수 m에 대하여, 다음 조건을 만족시키는 정수 a, b가 존재함을 보여라.

$$|a| \leq m,\ |b| \leq m,\ 0 < a + b\sqrt{2} \leq \frac{1+\sqrt{2}}{m+2}$$

2. A를 음이 아닌 정수들의 집합이라 할 때 다음 두 조건을 만족시키는 함수 $f : A \to A$를 모두 구하여라.

   (i) 임의의 $m, n \in A$에 대하여

$$2f(m^2+n^2) = \{f(m)\}^2 + \{f(n)\}^2$$

   (ii) $m, n \in A$이고 $m \geq n$ 이면 $f(m^2) \geq f(n^2)$

3. 한변의 길이가 1인 정삼각형 ABC의 변 BC위에 임의의 점 D를 잡고 삼각형 ABD, ADC의 내접원의 반지름을 각각 r_1, r_2라 한다. $\overline{BD} = p$ 라 할때 $r_1 r_2$를 p의 식으로 나타내고 $r_1 r_2$의 최대값을 구하여라.

제 2 일

1995. 4. 16.

4. 삼각형 ABC의 외접원의 중심을 O, 반지름의 크기를 R이라 한다. 삼각형이 놓인 평면위의 임의의 점 P를 잡고, P에서 세 변 또는 그 연장선 위에 내린 수선의 발을 각각 A_1, B_1, C_1 이라 한다. $\overline{OP} = d$ 라 할 때 $\frac{(\triangle A_1B_1C_1)}{(\triangle ABC)}$의 값을 R, d 의 식으로 나타내어라. 단, $(\triangle ABC)$는 $\triangle ABC$ 의 넓이이다.

5. 소수 p에 대하여 $p^2|a,\ (a,b) = p$ 일 때, 다항식

$$x^{n+2} + ax^{n+1} + bx^n + a + b$$

는 일차 이상의 두 정수계수 다항식의 곱이 될 수 없음을 증명하여라. 단, n은 양의 정수이고, a가 p^2으로 나누어 떨어질 때 기호 $p^2|a$로 나타내며, (a,b)는 a, b의 최대공약수를 뜻한다.

6. m, n을 $1 \le n \le m-1$을 만족하는 자연수라고 하자. 어떤 회사의 m명의 중역으로 구성된 위원회에서 비밀문서를 보관할 금고를 제작하고자 한다. 금고에는 서로 다른 ℓ개의 자물쇠를 달고 위원 각각에게는 서로 다른 k개의 열쇠를 지급하여 $n+1$명 이상의 위원이 모이면 항상 금고를 열 수 있지만, n명 이하의 위원이 모여서는 절대로 열 수 없도록 하려고 한다. ℓ의 최소값과 이 때의 k의 값을 구하여라.