1996년 최종대표선발시험
Final Round

제 1 일

1996. 4. 13.

1. 정사각형을 n개의 작은 정사각형의 조각으로 나누고자 한다. 이것이 가능하지 않는 n의 최대값을 구하고 그 이유를 밝혀라.

2. n을 $n \geq 1996$인 자연수라고 하자. $(x+y)^n$을 이항전개하였을 때, 모든 계수가 홀수가 되는 n의 최소값을 구하여라.

3. 주어진 삼각형 ABC와 만나지 않는 직선 l이 있다. 점 A, B, C에서 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 L, M, N이라고 하고, 점 L, M, N에서 각각 직선 BC, CA, AB에 내린 수선의 발을 각각 X, Y, Z라 한다. 세 직선 LX, MY, NZ가 한 점에서 만남을 증명하여라.

제 2 일

1996. 4. 14.

4. A는 4 자리의 자연수이고 B는 A의 자리수를 반대로 나열한 4자리의 자연수이다. A와 B의 최대공약수는 소수이고 B를 이 소수로 나눈 몫은 $A+2$라고 한다. 이러한 모든 A의 값을 구하여라.

5. 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\alpha(0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$인 부채꼴 OAB가 주어져 있다. 호 AB 위의 점 P에서 출발한 빛이 변 OB위의 점 Q와 변 OA위의 점 R과 점 P에서 반사하여

$$P \to Q \to R \to P \to Q \to R \to$$

와 같이 진행할 때 삼각형 PQR의 둘레의 길이는 P의 위치에 관계없이 일정함을 보이고 그 값을 구하여라.

6. 함수 $f : R \to R$ (R은 실수전체의 집합)가 다음 두 조건을 만족시키고 있다.

(i) $f(0) = 0,\ f(1) = 1$

(ii) $x \neq 0$ 일 때 $f(x^2 + \frac{1}{x}) = \{f(x)\}^2 + f(\frac{1}{x})$

이 때, 함수 f는 최대값을 갖지 않음을 증명하여라.